

Das Brachistochronenproblem

Ulrich Langenfeld

1 Das Exponat

Das Exponat besteht aus mehreren Bahnen, die zwei Punkte miteinander verbinden, den einen höher, den anderen tiefer gelegen. Eine Bahn ist die Gerade zwischen den beiden Punkten, also die räumlich kürzeste Verbindung. Die anderen Bahnen sind gekrümmt: Sie fallen am Anfang steil ab und laufen dann flach aus. Sie sind deutlich länger als die gerade Verbindung zwischen den beiden Punkten.

Läßt man jetzt gleichzeitig zwei Kügelchen losrollen, so stellt man fest, daß das Kügelchen auf der Geraden keineswegs zuerst unten ankommt. Vielmehr ist die Kugel auf der Bahn am schnellsten unten, die steil, aber nicht zu steil am Anfang beginnt und am Ende flach ausläuft. Es kann sogar vorkommen, daß die Kurve teilweise unterhalb des tiefer gelegenen Punktes verläuft. In Abbildung 1 kann man die Lage einer Kugel nach einer Laufzeit von einer Sekunde für verschiedene Bahntypen sehen. Auf der schnellsten Bahn benötigt der Massenpunkt 1 s (Anm.: Die Kugel wird hier und im folgenden bei den mathematischen Überlegungen idealisiert als Punkt angenommen. Eine echte Kugel benötigt 1.18 s, Begründung s. u.).

2 Problemstellung

Johann Bernoulli (1667 - 1748) hat im Juni 1696 in den „Acta Eruditorum“ folgendes Problem gestellt (siehe [HT96], [Ber94]):

„Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt“.

Er bemerkt dazu, daß die gerade Verbindungslinie zwischen A und B zwar die (räumlich) kürzeste sei, diese aber nicht in der kürzesten Zeit durchlaufen werde. Außerdem unterstellt er die Richtigkeit der Galilei-Hypothese, die besagt, daß sich die Geschwindigkeit proportional zur Quadratwurzel der durchfallenen Höhe verhält (Heutzutage wird über das Fallgesetz kein Wort mehr verloren).

Er gibt zur Lösung eine Frist bis Jahresende, sollte bis dann keine Lösung vorliegen, werde er seine veröffentlichen. Auf Bitten von G. W. Leibniz (1646 - 1716), der inzwischen eine Lösung gefunden hat, verlängert er die Frist bis Ostern, damit sich auch die Gelehrten in Frankreich und Italien mit diesem Problem auseinandersetzen können. Danach wollen er und Leibniz ihre Lösungen veröffentlichen.

Leibniz konnte Jakob Bernoulli dazu bewegen, eine Lösung zu finden, dem dieses Problem eigentlich gleichgültig war. Mit seinem Lösungsansatz schuf er die Grundlagen der Variationsrechnung, die z. B. in der modernen Physik eine sehr wichtige Rolle spielt. Auch Newton (1643 - 1727) legte anonym eine Lösung vor, die aber sofort als von ihm stammend erkannt

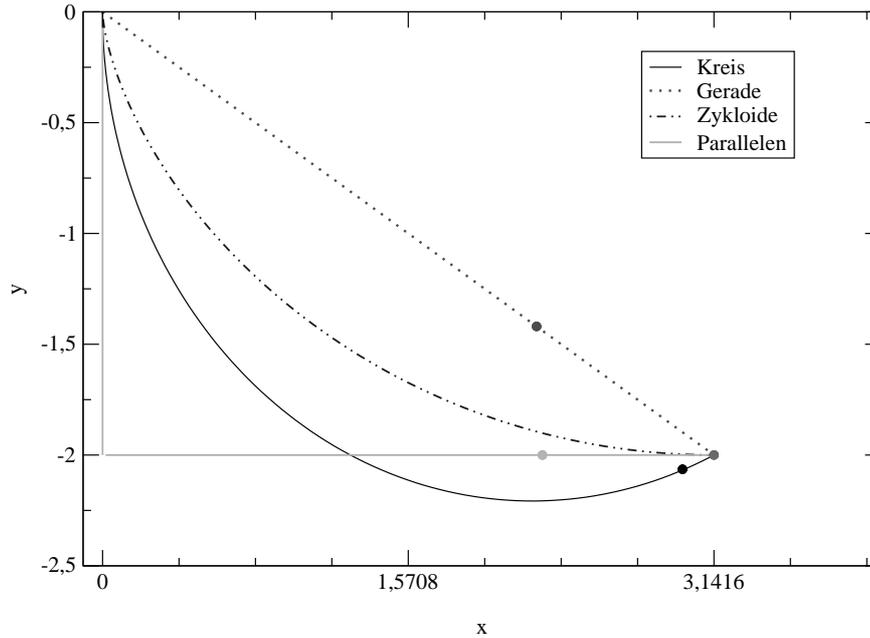


Abbildung 1: Lage der Kugel nach 1s

wurde. Außerdem löste L'Hôpital (1661 - 1704) unter Anleitung von Jakob Bernoulli (1654 - 1705, Bruder von Johann) das Problem.

3 Lösung von Johann Bernoulli

3.1 Bernoullis Idee

Bernoulli hat die Idee, das Snelliussche Brechungsgesetz aus der Optik zu verwenden. Dieses Gesetz kann aus derselben Forderung gewonnen werden wie seine Aufgabenstellung, nämlich aus dem Fermatschen Prinzip: Ein Lichtteilchen minimiert die Laufzeit zwischen zwei Punkten. Er stellt somit eine Analogie zwischen einem mechanischen und einem optischen Problem her. Die Rolle der Beschleunigung übernimmt hier eine variable optische Dichte, die zu einer Veränderung der Geschwindigkeit des Lichtteilchens führt, da die optische Dichte umgekehrt proportional zur Lichtgeschwindigkeit in dem Medium ist. Woher letztendlich die Beschleunigung herrührt, ist ja egal.

Das Brechungsgesetz Die optische Dichte ist für eine feste Wellenlänge des Lichtteilchens eine Materialkonstante. Fällt aus dem Vakuum, das eine optische Dichte von $n = 1$ hat, ein Lichtteilchen auf ein Medium mit höherer optischer Dichte, so wird das Teilchen zum Lot hin gebrochen. Aus der Forderung nach der Minimierung der Zeit, die das Licht zum Durchlaufen der Medien 1 und 2 braucht, ergibt sich das Brechungsgesetz (siehe dazu Abb. 2):

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad . \quad (1)$$

Dabei bedeuten: α_1, α_2 : Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel, n_1, n_2 : optische Dichte der Medien 1 und 2, v_1, v_2 : Lichtgeschwindigkeit in den Medien 1 und 2.

Die Sinus der Brechungswinkel verhalten sich also an jedem Punkt umgekehrt proportional zur optischen Dichte. Bernoullis Idee ist es nun, die optische Dichte des Mediums sich mit der

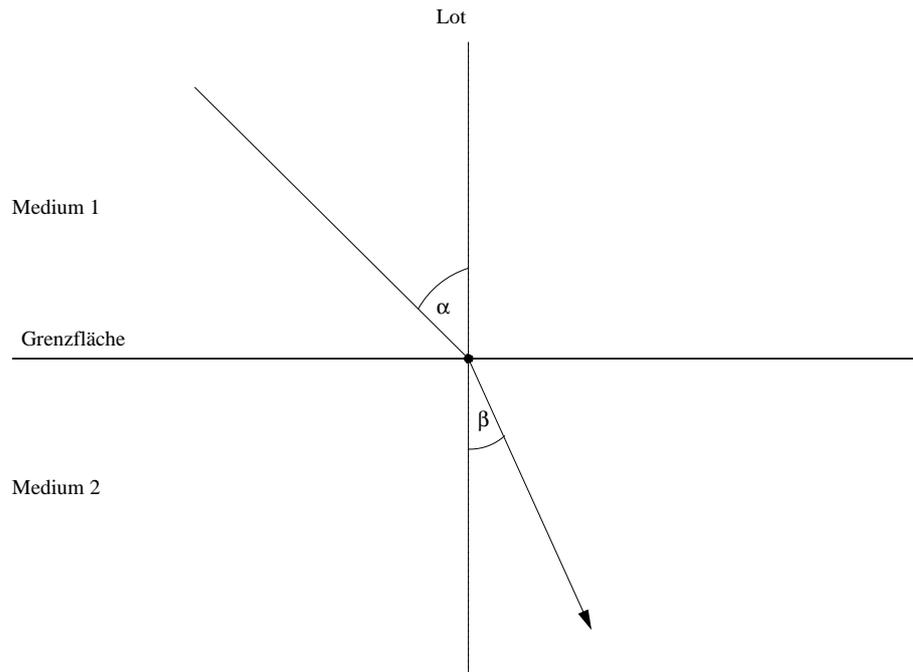


Abbildung 2: Das Brechungsgesetz

Dicke ändern zu lassen, und zwar modelliert er auf diese Weise die Galileihypothese nach. Statt der Schwerkraft, die für eine Beschleunigung eines fallenden Körpers sorgt, haben wir eine sich ändernde optische Dichte, und gemäß dem Fermatschen Prinzip wählt das Licht den Weg mit der kürzesten Laufzeit durch das Medium. Da also die Problemstellung analog ist, muß sich auch dieselbe Lösungskurve ergeben, da es ja egal ist, woher die Beschleunigung kommt. Bernoulli muß nur die optische Dichte geeignet variieren.

3.2 Konstruktion der Kurve

Bei A (siehe Abb. 3) tritt das Licht in ein Medium mit einer optischen Dichte, die mit der Eindringtiefe x des Lichts in das Medium variiert. Bernoulli legt wie in der Aufgabe gefordert die Galilei-Hypothese zugrunde, d.h., $\text{Zeit} \propto \sqrt{\text{Weg}}$. Die Strecke HC soll proportional zur Lichtgeschwindigkeit (antiproportional zur optischen Dichte) des Mediums bei C sein: $v \propto HC = t = \sqrt{ax}$. Das Lichtteilchen legt dann die Kurve AMK in diesem Medium zurück, siehe dazu Abb. 4. Die optische Dichte an der Stelle M ist dieselbe wie bei C , da sie ja nur mit der Eindringtiefe x variiert. Bernoulli betrachtet jetzt den Sinus des Neigungswinkels der Kurve an der Stelle C gegen die Vertikale (Lot), die er für die Anwendung des Brechungsgesetzes benötigt. Das Verhältnis des Sinus dieses Winkels zur Strecke HC ist gemäß Konstruktion konstant. Es gilt

$$\frac{dy}{dz} = \frac{t}{a} \quad \text{oder} \quad a dy = t dz \quad . \quad (2)$$

Er quadriert die letzte Gleichung, wendet auf das infinitesimal kleine Dreieck Mnm den Satz des Pythagoras an $dz^2 = dx^2 + dy^2$ und setzt die Beziehung zwischen t und x ein. Damit erhält er:

$$dy = \sqrt{\frac{x}{x-a}} dx \quad . \quad (3)$$

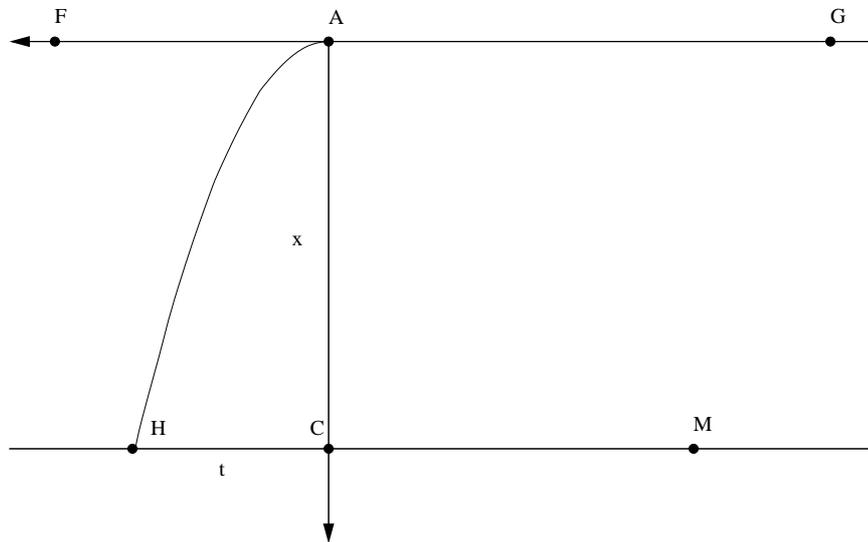


Abbildung 3: Variation der optischen Dichte

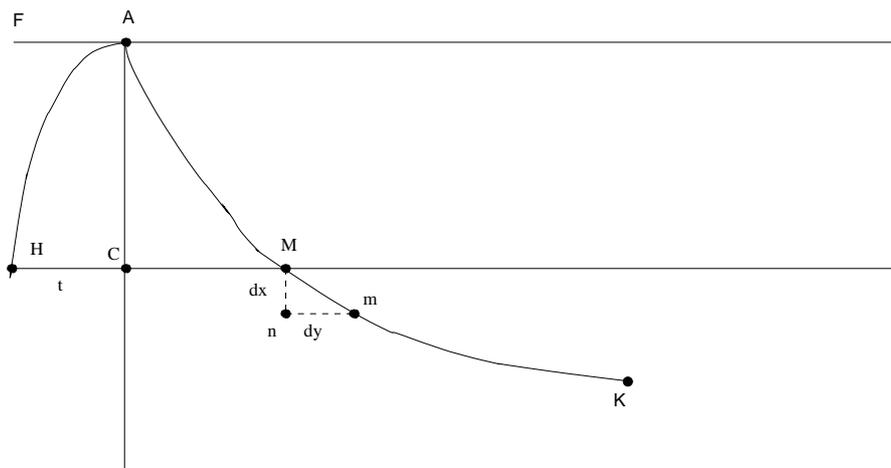


Abbildung 4: Die Kurve des Lichtteilchens

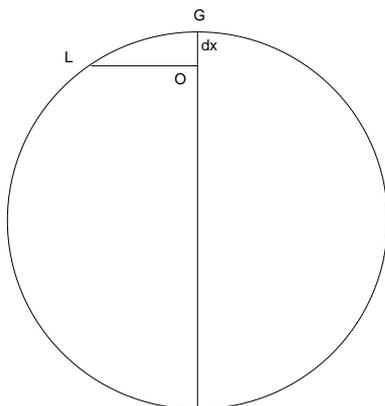


Abbildung 6: Infinitesimales Steigungsdreieck

Heute rechnet man eher so:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \int_L^G \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} &= \frac{a}{2} \int_L^G \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}} = \int_L^G \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{a}-1\right)}} \\ &= \frac{a}{2} \arcsin\left(\frac{2x}{a}-1\right) \Big|_L^G = \frac{a}{2} \angle(GL) \quad . \end{aligned} \quad (8)$$

Man sieht, daß beide Methoden zu demselben Ergebnis führen. Zusammenfassend erhalten wir:

$$dy = \frac{1}{2} \frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}} - \frac{1}{2} \frac{(a-2x)dx}{\sqrt{ax-x^2}} \quad \text{Einsetzen der Glen. (5) und (8) in Gl. (4)} \quad (9)$$

$$= d(\text{arc}(GL) - LO) \quad (10)$$

$$\int_C^M dy = CM = \text{arc}(GL) - LO \quad \text{Integration von Gl. (10)} \quad (11)$$

$$CO = CM + MO \quad \text{Zerlegung der Strecke CO} \quad (12)$$

$$MO = CO - \text{arc}(GL) + LO \quad \text{Einsetzen von Gl. (12) in Gl. (11)} \quad (13)$$

$$AG = CO = \text{arc}(GLK) \quad CO \text{ ist genauso lang wie der Bogen } GLK \quad (14)$$

$$= \text{arc}(GL) + \text{arc}(LK) \quad \text{Zerlegung des Bogens } GLK \quad (15)$$

$$\Rightarrow CO - \text{arc}(GL) = \text{arc}(LK) \quad \text{Einsetzen von Gl. (15) in Gl. (14)} \quad (16)$$

$$\Rightarrow MO = \text{arc}(LK) + LO = ML + LO \quad \text{Einsetzen von Gl. (16) in Gl. (13)} \quad (17)$$

$$\Rightarrow ML = \text{arc}(LK) \quad , \quad (18)$$

woraus folgt, daß KMA eine Zykloide ist.

4 Moderne Lösung

Johann Bernoullis Bruder Jakob hat mit seiner Lösung die Variationsrechnung begründet, seine Idee war sehr weittragend, aber die konkrete Lösung erscheint aus heutiger Sicht ziemlich kompliziert. Ich werde eine Lösung präsentieren, die die aus einem Variationsansatz folgenden

Euler-Lagrange Gleichungen benutzt. Dabei sei darauf hingewiesen, daß die Euler-Lagrange-Gleichungen nur eine notwendige Bedingung für die Lösung sind. Zur Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen siehe [Kön97]

4.1 Anwendung des Variationsprinzips

Es sei $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$ eine fast überall stetig differenzierbare Kurve. Für ihre Bogenlänge $s(\gamma)$ gilt:

$$s(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad . \quad (19)$$

Gesucht ist eine Kurve $\gamma \in \{\gamma \in \mathcal{C}^2([a, b]); \gamma(t=0) = a, \gamma(t=T) = b, T = \min\}$. Der nächste Schritt besteht darin, ein Funktional zu finden, das die Euler-Lagrange-Gleichungen liefert. Hierbei helfen uns die physikalischen Definitionen leiten:

$$t = \int_{x_0}^{x_T} \frac{ds}{v} = \int_{x_0}^{x_T} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - f(x))}} dx \quad . \quad (20)$$

Hier wurde die Bogenlänge eingesetzt und die „Galileihypothese“ benutzt: Aus dem Satz von der Erhaltung der Energie $\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_0 - y(x))$ folgt die verwendete Beziehung für die Geschwindigkeit v ; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ist die Erdbeschleunigung.

Die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (21)$$

liefert mit $L = \frac{\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{2g(y_0-f(x))}}$ folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{y_0 - f(x)}} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{(y_0 - f(x))^3}} \quad . \quad (22)$$

4.2 Integration der Differentialgleichung

Dieser Ausdruck ist unhandlich, betrachtet man die Lagrangefunktion L , so sieht man, daß es eine Erhaltungsgröße gibt, weil L nicht explizit von x abhängt. Es gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} y' - L = c = \text{const} \quad . \quad (23)$$

Es ergibt sich jetzt folgende Differentialgleichung:

$$-\frac{1}{\sqrt{2g(1 + f'(x)^2)(y_0 - f(x))}} = c \quad (24)$$

Einsetzen, Vereinfachen und Trennung der Variablen unter vorläufiger Vernachlässigung der Integrationskonstanten ergibt

$$\int dx = c \int \sqrt{\frac{2g(f - y_0)}{1 - 2gc^2(f - y_0)}} df = c \int \sqrt{\frac{2gh}{1 - 2gc^2h}} dh \quad . \quad (25)$$

Die Integration läßt sich durch die Substitution

$$h(t) = \frac{1}{2gc^2} \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{4gc^2} (1 - \cos t), \quad dh = \frac{1}{2gc^2} \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt \quad (26)$$

leicht ausführen. Man erhält:

$$x = \int \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{1 - \sin^2 \frac{t}{2}}} \frac{1}{2gc^2} \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt = -\frac{1}{2gc^2} \int \sin^2 \frac{t}{2} dt = -\frac{1}{4gc^2} (t - \sin t) + t_0 \quad (27)$$

Auflösen dieses Resultats nach t ist analytisch nicht möglich, also erhält man als Lösung folgende Kurve in Parameterdarstellung, wobei t_0 eine Integrationskonstante bezeichnet:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), -a(1 - \cos t) + t_0), \quad a = \frac{1}{4gc^2} \quad (28)$$

Diese Kurve läßt sich als diejenige Kurve interpretieren, die entsteht, wenn sich ein Massenpunkt auf dem Rand eines Kreises mit Radius a bewegt, der ohne zu gleiten auf der x -Achse abrollt. also eine Zykloide.

Zykloide

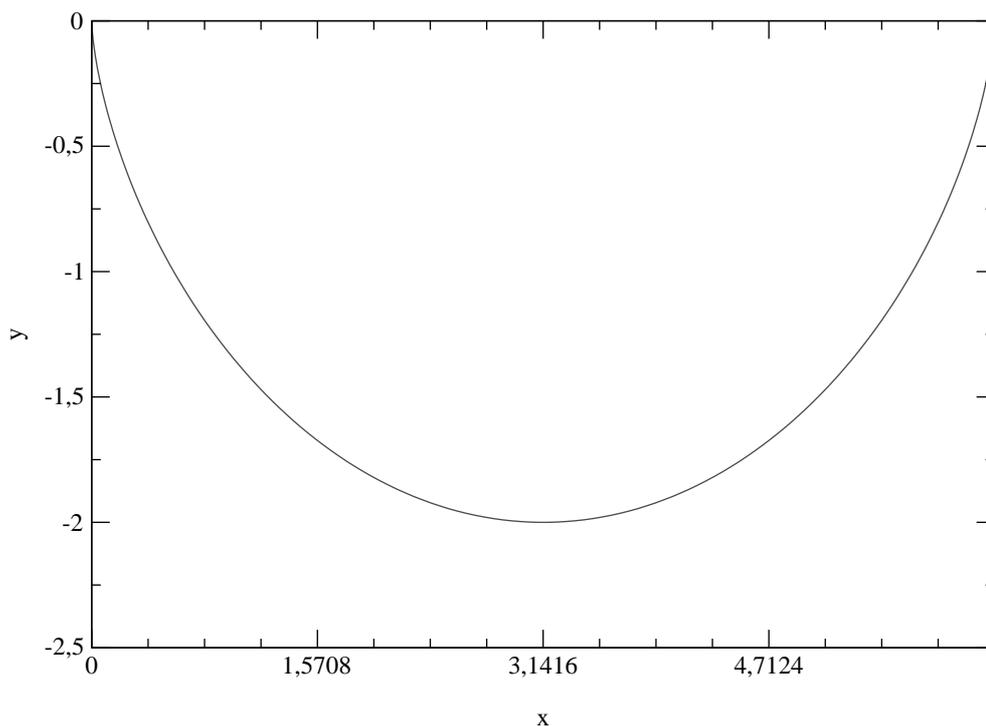


Abbildung 7: Zykloide

4.3 Diskussion von speziellen Anfangswerten

Wie sieht nun zu zwei gegebenen Punkten die sie verbindende Zykloide nun aus? Und wie lange braucht ein Massenpunkt zum Durchlaufen dieser Kurve? Die erste Frage läßt sich teilweise exakt beantworten. P_1 befinde sich im Koordinatenursprung, P_2 habe die Koordinaten (x_2, y_2) ,

wobei die Punkte nicht übereinander liegen sollen, sie dürfen aber auf gleicher Höhe liegen! Im letztgenannten Falle wird klar, daß eine gerade Verbindungslinie zwischen beiden Punkten nicht zum Ziel führen würde. Der Massenpunkt bliebe bei P_1 liegen, der Umweg dient gerade dazu, Schwung zu holen. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt bei P_1 , daraus folgt $t_0 = 0$.

Die Bestimmung des Parameters a geschieht am einfachsten nach der Bernoullischen Methode. Die rechnerische Schwierigkeit liegt darin, daß man zu gegebenen zwei Punkten den Kurvenparameter t_{P_2} und den Radius a aus P_2 bestimmen muß, was auf eine transzendente Gleichung führt. Folglich ist es auch schwierig, die Zeit auszurechnen.

Man kann allerdings einen Spezialfall betrachten: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (a\pi, -2a)$. Man sieht, daß man dann o. B. d. A. $a = 1$ setzen kann und daß $P_1 = \gamma(0)$, $P_2 = \gamma(\pi)$ gilt ($\gamma(t)$ aus Gl. (28)). Also braucht ein Massenpunkt von P_1 nach P_2 die Zeit

$$T = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{\sqrt{-2gy(t)}} dt = \int_0^\pi \frac{\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}}{\sqrt{2g(1 - \cos t)}} dt = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \quad (29)$$

Die Lösungskurve kann auch tiefer als der tiefere der beiden Punkten verlaufen. Das ist genau dann der Fall, wenn $|\frac{\Delta x}{\Delta y}| > \frac{\pi}{2}$ ist ($\Delta x, \Delta y$: Differenzen der Koordinaten der Punkte).

4.4 Vergleich mit anderen Bahnkurven

An dieser Stelle ist es interessant, einmal zu vergleichen, wie lange der Massenpunkt auf anderen Kurven braucht. Dazu seien $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\pi, -2)$ wie eben gewählt (Längeneinheiten in m). Ich betrachte folgende Kurven, die an die zwei Punkte angepaßt werden müssen. Gegebenenfalls habe ich weitere einschränkende Bedingungen gewählt:

- Zykloide: $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = -a(1 - \cos t)$
- Kreis: Radius r , Mittelpunkt $M(m_1, m_2) = M(m_1, 0)$, $r^2 = (x - m_1)^2 + y^2$
- Gerade: $y(x) = ax + b$
- nach rechts geöffnete Parabel: $y(x) = -\sqrt{2px}$
- nach oben geöffnete Parabel: $y(x) = ax^2 + bx + c$ und Minimum in P_2
- Erst frei fallen, dann mit der erreichten Endgeschwindigkeit weiter rollen:

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zu sehen, die Kurven in Abbildung 8. Bis auf Zykloide und Gerade sind die Zeiten numerisch bestimmt worden. Mit dem Satz von Tschebyscheff [BSMM95] kann man folgern, daß für den Kreis und die nach rechts geöffnete Parabel die Integrationen nicht elementar ausführbar sind. Man kann sich aber auch zum Vergleich die Geschwindigkeiten des Massepunktes auf den verschiedenen Bahnen anschauen. Es gilt für die (Tangential-)Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gy(x)} \quad . \quad (30)$$

Man sieht, daß die Zykloide einen Mittelweg zwischen hoher Anfangsbeschleunigung und Vorwärtstommen in x -Richtung darstellt. Auf der Kreisbahn wird der Körper innerhalb einer kurzen Strecke auf eine hohe Geschwindigkeit gebracht, muß aber dafür ein langes Stück auslaufen. Bei der Geraden ist es umgekehrt. Die Zykloide stellt gerade das Optimum dar.

Kurve	angepaßte Kurve	Zeit [s]	\approx [s]	$s(\gamma)$ [m]
Zykloide	$x(t) = t - \sin t$ $y(t) = -(1 - \cos t)$	$T = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^\pi dt = \frac{\pi}{\sqrt{g}}$	$\approx 1,00$	4,00
Kreis	$y(x) = -\sqrt{\frac{\pi^2+4}{\pi}x - x^2}$	$T = \frac{\pi^2+4}{\pi\sqrt{8g}} \int_0^\pi \left(\frac{\pi^2+4}{\pi}x - x^2\right)^{-3/4} dx$	$\approx 1,03$	4,09
Gerade	$y(x) = -\frac{2}{\pi}x$	$T = \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{\sqrt{4g\pi}} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{\sqrt{g}}$	$\approx 1,19$	3,72
Parabel	$y(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$	$T = \frac{1}{2\pi^{1/4}\sqrt{g}} \int_0^\pi x^{-3/4} \sqrt{(\pi x + 1)} dx$	$\approx 1,01$	3,89
Parabel	$y(x) = \frac{2}{\pi^2}(x^2 - 2\pi x)$	$T = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\pi^4+16(x-\pi)^2}}{\sqrt{2\pi x-x^2}} dx$	$\approx 1,05$	4,65
Freier Fall, weiterrollen	$x = 0, x \geq -2$ $y = -2, y \leq \pi$	$T = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} + \frac{s_2}{\sqrt{2gs_1}} = \frac{1}{\sqrt{g}}(2 + \frac{\pi}{2})$	$\approx 1,14$	5,14

Tabelle 1: Durchlaufzeiten für verschiedene Bahnkurven

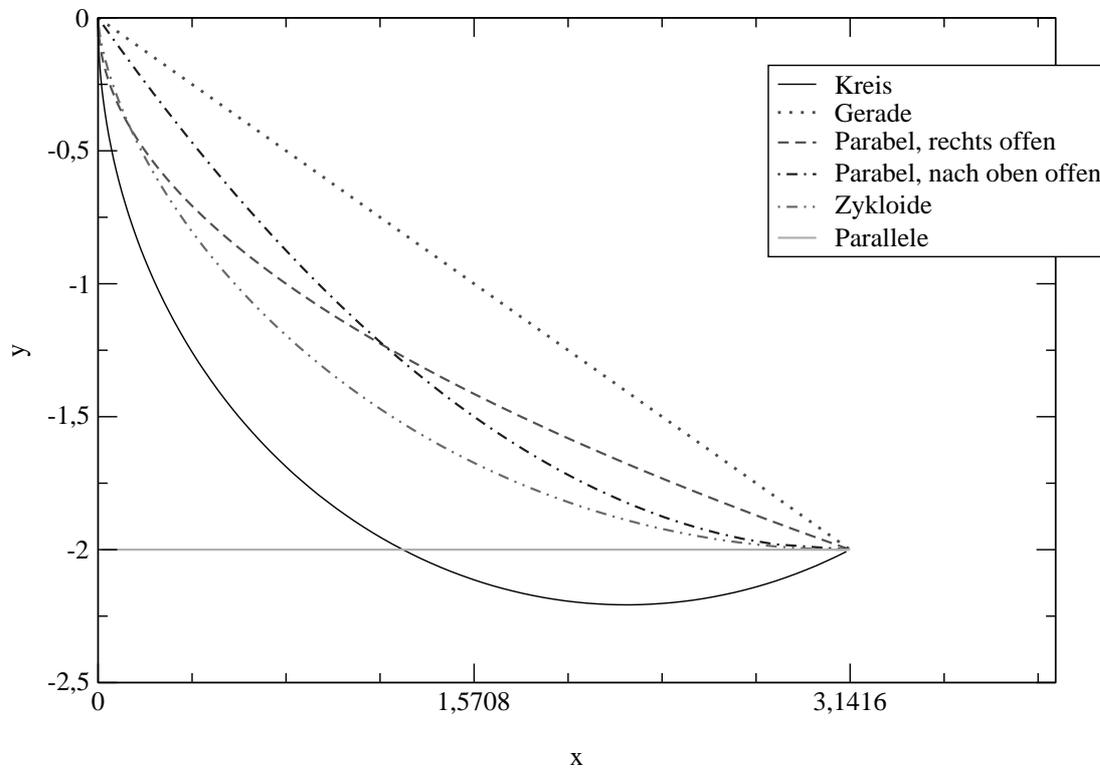


Abbildung 8: Bahnkurven

Geschwindigkeit des Massenpunktes

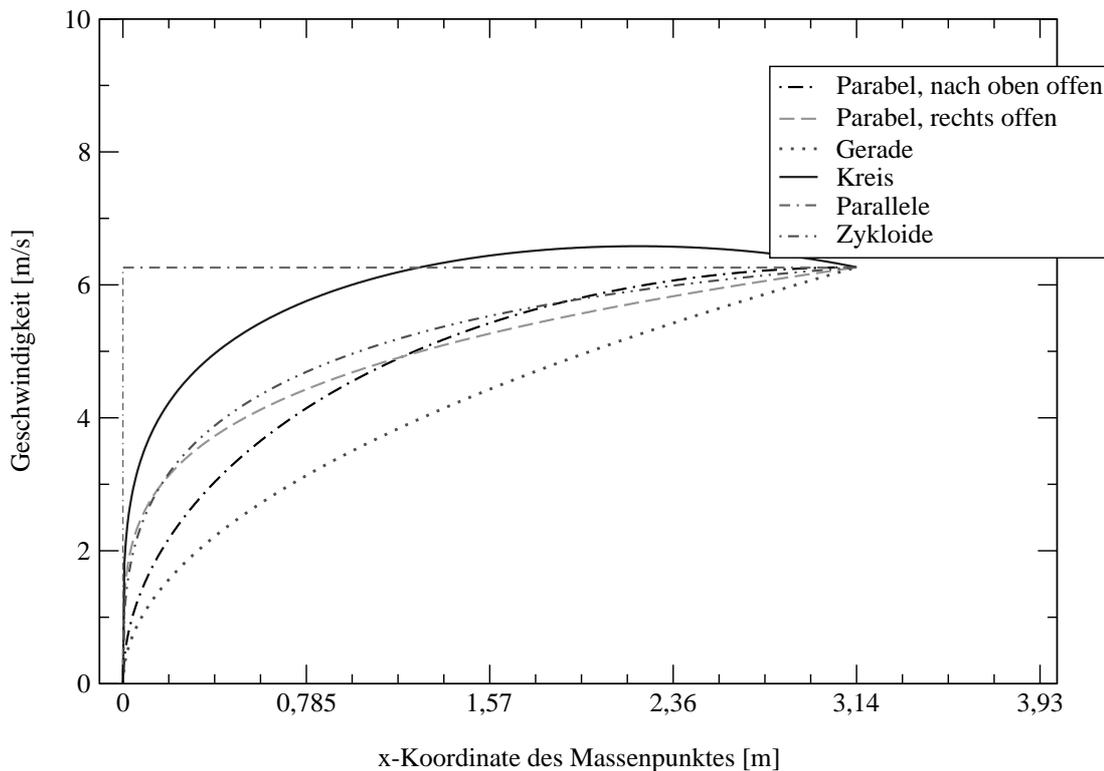


Abbildung 9: Geschwindigkeiten

Anmerkung zur Zykloide: Bei der Zykloide ist eine Auflösung der x -Koordinate nach t nicht möglich. Deshalb habe ich $\sin(t) \approx t - \frac{t^3}{3!}$ angenähert und erhalte damit $y(x) = 1 - \cos(\sqrt[3]{6x})$. Das ergibt einen maximalen Fehler von etwa 3% am Zielpunkt. Diesen Fehler habe ich durch einen Korrekturfaktor $f = 1 + \frac{0.03}{\pi}x$ näherungsweise ausgeglichen.

5 Eigenschaften der Lösungskurve

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften der Lösungskurve diskutiert werden (vgl. [Kön95]).

- Die Zykloide definiert auf $I = (0, 2\pi)$ eine **stetig differenzierbare Funktion**.
Beweis: $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t - \sin t, -(1 - \cos t))$, $\dot{x}(t) = 1 - \cos t$ hat auf $I = (0, 2\pi)$ keine Nullstelle. Also gibt es auf $I = (0, 2\pi)$ eine differenzierbare Funktion mit der Ableitung $f'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\sin t}{\cos t - 1}$. Auf $I = (0, \pi)$ ist $f(x)$ monoton wachsend, auf $I = [\pi, 2\pi)$ monoton fallend. Wegen $f''(x) = (1 - \cos t)^{-2} > 0$ ist f konvex.
- **Bogenlänge:** Diese errechnet sich zu $s(\gamma) = \int_0^\varphi \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^\varphi |\sin \frac{t}{2}| dt = 4(1 - \cos \frac{\varphi}{2})$. Für einen ganzen Zykloidenbogen ($\varphi = 2\pi$) findet man $s(\gamma, 0, 2\pi) = 8$. Die Bogenlänge ist sogar rational! Man kann jetzt auf Bogenlänge umparametrisieren: Auflösen ergibt $\varphi = 2 \arccos(1 - \frac{s}{4})$, daraus folgt dann

$$\gamma(s) = \left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) - \sin\left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right), \cos\left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right) - 1 \right) \quad (31)$$

- Die Zykloide ist **tautochron**, das heißt, ein Massenpunkt braucht auf einem Stück eines Zykloidenbogens unabhängig von seinem Startpunkt immer die gleiche Zeit, um den tiefsten Punkt der Kurve zu erreichen. Beweis:

Es ist klar, daß „Obere Grenze – untere Grenze“ nicht funktioniert, da wir sonst nicht berücksichtigen, daß der Massenpunkt zu Beginn in Ruhe ist.

Wir lassen den Massenpunkt auf einem beliebigen Punkt $Q(x_Q, y_Q)$ der Zykloide starten, für die x -Koordinate dieses Punktes gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_Q < \pi$. Wir verschieben die Zykloide jetzt so in y -Richtung um c ($0 \leq c < 2$) nach oben, daß Q auf der Abszisse liegt. Dazu gehört der Kurvenparameter $t_Q = \arccos(1 - c)$, diese Zykloide hat also die Parameterdarstellung $\gamma(t) = (t - \sin t, -(1 - c + \cos t))$. Jetzt kann man wie gehabt die Zeit ausrechnen:

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{t_Q}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\sqrt{1 - c - \cos t}} dt = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{-1}^{1-c} \frac{dx}{\sqrt{(1 - c - x)(1 + x)}} \quad (t = \arccos x) \quad (32)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{g}} \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - c - x}{1 + x}} \right) \Big|_{-\epsilon}^{1-c} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \quad . \quad (33)$$

(Die Singularitäten an den Grenzen verhalten sich gutartig, das Integral findet man in [BSMM95].) Also hängt die Zeit nicht von c ab.

6 Relevanz für den Unterricht

6.1 Modelle

Die Zykloide läßt sich zusammen mit einigen Vergleichsbahnen als Modell bauen. Als Massepunkte wird man am besten Kugeln verwenden, die auf einer Schiene hinunterrollen. Hierbei muß man allerdings das Trägheitsmoment der Kugeln bedenken, das heißt, zur kinetischen Energie kommt noch ein Rotationsanteil hinzu:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5}mr^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2 = mgh(x) \quad (34)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}gh(x)} \quad . \quad (35)$$

Das hat zur Folge, daß die Bewegung um den Faktor $\sqrt{7/5}$ langsamer wird. Dadurch werden die absoluten Zeitdifferenzen größer, was den Effekt deutlicher werden läßt. Dabei ist die Reibung noch gar nicht berücksichtigt! Nimmt man statt Kugeln Hohlzylinder, so erreicht man eine größere Verlangsamung der Bewegung, nämlich um den Faktor $\sqrt{2}$, da ein Hohlzylinder ein Trägheitsmoment von $\Theta = mr^2$ bezüglich seiner Figurenachse hat, dieses ist also zweieinhalb Mal größer. Ein solches Modell kann dann zeigen, daß die Kugel auf der geraden Verbindungslinie zwischen beiden Punkten länger als auf der Zykloiden braucht. Am besten läßt man zwei Kugeln gleichzeitig auf zwei Bahnen losrollen.

6.2 Analogien

Dieses Problem ist historisch unter anderem durch eine Analogiebildung gelöst worden: Wandle das Problem in ein anders um, von dem du die Lösung kennst oder einfacher zu lösen ist.

Nach der Devise können auch Schüler komplexere Probleme lösen oder kompliziertere Fragestellungen angehen. Diese Methode wird häufig in der Physik angewandt, häufig auch nur näherungsweise, da es nur drei Probleme gibt, die exakt lösbar sind.

6.3 Extremwertproblem

Anhand dieses Beispiels kann man in der Oberstufe erklären, daß es noch andere Typen von Extremwertaufgaben als das Auffinden von Extrema von Funktionen gibt. Die Herleitung der Differentialgleichung ist mit schulischen Mitteln nicht möglich (siehe [Buc86]), man kann aber das Funktional angeben und dann für verschiedene Kurven die Zeiten numerisch ausrechnen. Im Zeitalter des Computers dürfte das kein Problem sein.

6.4 Zykloiden im Alltag

Sicher werden sich einige fragen, ob es solche Kurven auch im Alltag gibt oder ob sich die Mathematiker solche Sachen nur zum Selbstzweck ausdenken.

Das Ventil eines Fahrradschlauchs beschreibt eine Zykloide. Mit der Definition der Zykloide ist klar, warum das so ist, es liegt ja eine Überlagerung einer Drehbewegung mit einer Translation vor.

Die Tautochronie der Zykloide und die Eigenschaft, daß die Evolute der Zykloide wieder eine Zykloide ist, nutzte Huygens, um eine bei allen Auslenkungen genau gehende Uhr zu konstruieren. Das war für die Schifffahrt damals sehr wichtig, mehr dazu in [Vog97]. Für das mathematische Pendel gilt ja eine gewisse Genauigkeit nur für kleine Auslenkungen.

6.5 Noch mehr Zykloiden...

Zum Schluß noch einige Bemerkungen, was man noch mit der Kurve machen kann. Bleiben wir beim Fahrrad. Das Ventil beschreibt eine (gewöhnliche) Zykloide, wie sieht die Kurve aus, die die Katzenaugen zwischen den Speichen beschreiben? Der Punkt liegt jetzt nicht mehr auf der Peripherie des Kreises, sondern im Inneren. Man muß also den Rotationsanteil der Kurve mit einem Faktor $\lambda < 1 = R$ multiplizieren (Radius des erzeugenden Kreises), das Ergebnis ist eine verkürzte Zykloide, siehe Abbildung 10. Ihre Parameterdarstellung lautet: $\gamma_k(t) = (t - \lambda \sin t, 1 - \lambda \cos t)$, $0 < \lambda < 1$. Wie man sieht, hat diese Kurve keine senkrechten Tangenten, sie definiert deshalb eine stetig differenzierbare Funktion von $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Was passiert, wenn man $\lambda > 1$ wählt? Das Ergebnis ist eine verlängerte Zykloide, siehe Abbildung 10. Hier tritt ein neues Phänomen auf: Die Kurve besitzt Doppelpunkte. Sie kann also keine Funktion $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definieren.

Wer Lust hat, kann noch weiter spielen, zum Beispiel den Kreis auf einem Kreis abrollen lassen. Der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt. Der Computer kann auch hier hilfreiche Dienste leisten. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung eines Spirographen. Dieser besteht zum einen aus Zahnrädern mit Löchern in verschiedenen Abständen zum Mittelpunkt, zum anderen aus Linealen mit Zähnen an den Kanten. Man kann jetzt einen Stift in ein Loch eines Zahnrads stecken und auf einem anderen Zahnrad oder einem Lineal abrollen lassen. Dadurch kann man verschiedene Rollkurven erzeugen.

Typen von Zykloiden

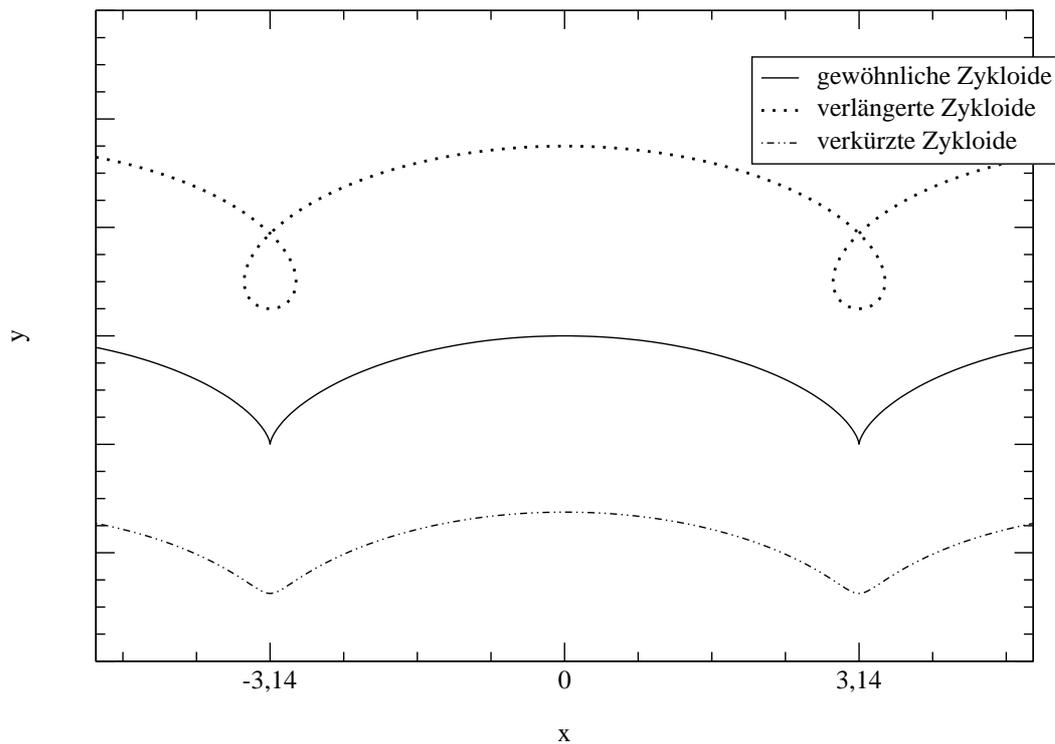


Abbildung 10: Verschiedene Typen von Zykloiden

Literatur

- [Ber94] Johann Bernoulli. *Abhandlungen über Variationsrechnung*, Band 46 von *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*. Verlag Wilhelm Engelmann, 1894.
- [BSMM95] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harry Deutsch, 1995.
- [Buc86] Ingo Buchholz. Die Brachistochrone, die Kurve kürzester Fallzeit, im Unterricht. *Praxis der Naturwissenschaften Physik*, Seiten 32–35, 1. März 1986.
- [HT96] S. Hildebrandt and A. Tromba. *Kugel, Kreis und Seifenblasen*. Birkhäuser, 1996.
- [Kön95] Konrad Königsberger. *Analysis 1*. Springer-Verlag, 1995.
- [Kön97] Konrad Königsberger. *Analysis 2*. Springer-Verlag, 1997.
- [SB79] K. Spallek and A. Brüning. *MU(2)*, 1979.
- [Spa78] K. Spallek. *MNU(2)*, 1978.
- [Tre93] Klaus Treitz. Die Zykloide. *MNU*, Seiten 327–334, Sep. 1993.
- [Vog97] H. Vogel. *Gehrtsen, Physik*. Springer, 19. Auflage, 1997.
- [Zei80] H. Zeitler. Radlinien in Schule, Technik und Wissenschaft. *MU(4)*, 1980.