

**Auf verschiedenen Wegen zum selben Ziel -
Kugeln rollen im Schwerfeld der Erde**

Ein Vergleich von Theorie und Experiment

Facharbeit im Grundkurs Physik

von
Volker Dirnberger

Inhaltsverzeichnis

1.	<i>Vorwort</i>	Seite 3
2.	<i>Einleitung</i>	Seite 3
3.	<i>Hauptteil</i>	Seiten 4 - 17
3.1	Konstruktion des Experiments.....	Seite 4
3.2	Messung.....	Seite 5
3.3	Vergleich der Zeiten.....	Seite 7
3.4	Herleitung der Formel für die Berechnung der Zeit.....	Seite 8
3.5	Berechnung der Zeit für die Gerade.....	Seite 10
3.6	Berechnung der Zeit für die Zykloide.....	Seite 13
3.7	Vergleich von Theorie und Experiment.....	Seite 16
3.8	Interessantes.....	Seite 17
4.	<i>Schluss</i>	Seiten 18 - 20
4.1	Literaturhinweise.....	Seite 18
4.2	Literaturverzeichnis.....	Seite 18
4.3	Erklärung.....	Seite 20

1. Vorwort

Das Thema der vorliegenden Facharbeit interessierte mich, da ein Mitschüler schon zuvor am Aufbau der Apparatur gescheitert war. Der Reiz dieser Arbeit liegt darin, an Experiment und Theorie nachzuvollziehen und zu erklären, dass der kürzeste Weg nicht immer der schnellste ist. Werden Menschen vor die Frage gestellt, welche Kugel wohl früher ankommen wird, werden häufig falsche Voraussagen gemacht. Oft wird mit dem Energieerhaltungssatz argumentiert, und es stimmt ja auch, dass die Kugeln am Startpunkt dieselbe potentielle Energie und am Ziel dieselbe kinetische Energie haben (die Kugeln sind also am Ziel gleich schnell), allerdings sagt dies nichts über die für den Zeitbedarf entscheidende Durchschnittsgeschwindigkeit aus.

2. Einleitung

Verschiedene Bahnen sollen zwei unterschiedlich hohe, aber nicht untereinander liegende, Punkte A und B verbinden. Auf diesen Bahnen sollen Kugeln rollen.

Dieses Problem nennt man auch Brachistochroneproblem (aus dem Griechischen: brachistos = „am schnellsten“ und chronos = „Zeit“).

Erstmals befasste sich Johann Bernoulli (1667 - 1748) mit dem Brachistochroneproblem.

Er veröffentlichte im Juni 1696 in der wissenschaftlichen Zeitschrift „Acta Eruditorum“ eine Einladung zur Lösung eines neuen Problems:

"Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt."
[Lang02]

Im folgenden gab Johann Bernoulli noch einige Hinweise zur Lösung des Problems und setzte schließlich eine Frist bis Ende des Jahres 1696. Danach werde er, sollte kein anderer eine Lösung vorgelegt haben, seine eigene Lösung veröffentlichen.

Kurz nach dieser Aufgabenstellung erhielt Johann Bernoulli eine Lösung von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), der ihn zusätzlich darum bat, die Frist bis Ostern 1697 zu verlängern, damit auch Wissenschaftler aus anderen Länder wie Frankreich und Italien, in denen die „Acta Eruditorum“ erst später erschien, sich mit der Aufgabe befassen könnten.

Daraufhin startete Johann Bernoulli einen zweiten Aufruf, in dem er als Belohnung Ruhm, Ehre und Lob versprach. Auf diesen Aufruf antworteten mehrere Wissenschaftler, unter anderem Jakob Bernoulli (1654 - 1705, Bruder von Johann), der sich auf Bitten von Leibniz auch mit der Aufgabe beschäftigt hatte. Mit seiner Lösung schuf Jakob Bernoulli die Grundlagen der heutigen Variationsrechnung, die z.B. in der modernen Mechanik unerlässlich ist. Leibniz selbst hielt seine Lösung nicht einer weiteren Veröffentlichung würdig, da sie denen der Brüder Bernoulli sehr ähnlich sei.

Neben den Lösungen des Marquis de l'Hospital (1661 - 1704) und des Ehrenfried Walter Graf von Tschirnhausen (1651 - 1708) ging auch eine anonyme Lösung des Problems ein, die von Johann Bernoulli mit den Worten „ex ungue leonem“ also etwa *von der Pranke zum Löwen* als Lösung von Isaac Newton (1643 - 1727) erkannt wurde.

Die Lösung des Johann Bernoulli basierte auf dem Grundsatz, dass Licht immer den schnellsten Weg wählt. Jakob Bernoulli „stellte die Bahn als Lichtweg in einem Medium veränderlicher Brechzahl dar und benutzte das Fermat-Prinzip (Pierre de Fermat (1601 – 1665)) der kürzesten Laufzeit“[Vog97]. Zudem brauchte er nur die Fallgesetze der Galilei-Hypothese und die Eigenschaften der Zykloide. Diese Lösung wird ausführlich in [Lang02] und [Wag00] beschrieben.

3.1 Konstruktion des Experiments

Beim Bau der Versuchsanlage waren drei Bahnen, eine Gerade und zwei Kreisbahnen mit identischem Radius, von denen eine nach oben gewölbt und die andere entgegengesetzt nach unten gewölbt sein sollte, vorgegeben. Die gerade Bahn stellt die räumlich kürzeste Verbindung zwischen Start- und Zielpunkt dar. Obwohl beide Kreisbögen länger sind als die Gerade, benötigt eine Kugel, nur durch die Schwerkraft angetrieben, für das Durchlaufen der nach unten gewölbten Bahn weniger und der nach oben gewölbten Bahn mehr Zeit als für die gerade Bahn. Zusätzlich wurde noch ein Zykloidenbogen konstruiert, der die beiden Punkte im Schwerfeld der Erde zeitlich am kürzesten verbindet.

Ein Mitschüler scheiterte zuvor schon am Aufbau einer solchen Apparatur, da bei seinem Versuch die Kugeln in Rohren rollen sollten, dabei aber Pendelbewegungen der Kugel auftraten, die die Kugeln nicht nacheinander sondern gleichzeitig ankommen ließen. Im hier beschriebenen Versuch rollen die Kugeln auf Schienen, was bei der experimentellen Ermittlung des Zeitaufwands die Fehlerquelle des Hin-

und Herpendelns weitestgehend ausschließt, allerdings bei der rechnerischen Lösung eine Berücksichtigung der Rotation der Kugeln fordert.

Damit die Schienen mit den zur Verfügung stehenden Mitteln möglichst exakt die Kurven beschreiben, wurden flexible Kunststoffrohre verwendet. Dies gilt ebenso für die gerade Bahn, damit der Reibungskoeffizient bei allen Bahnen gleich ist und dieser somit keinen Einfluss auf einen Vergleich der Zeiten hat, die ohne Berücksichtigung der Reibung ermittelt wurden. Der Unterbau besteht aus 25mm starken Pressspanplatten, damit viele Befestigungspunkte für die Schienen zur Verfügung stehen. Die Schienen werden dann nacheinander auf die Bahnen geschraubt. Hat man eine Schiene befestigt, kann man einen Abstandshalter, z.B. ein Holzstück nehmen, um die zweite Schiene möglichst parallel anzubringen. Dies ist besonders schwer, da man die Schienen etwas schräg schrauben muss, damit sich keine Unebenheiten der Befestigungslöcher auf der Lauffläche befinden, sich die Schienen aber durch die Schräglage umso mehr zusammenziehen, je fester man anschraubt. Zuletzt werden die Bahnen auf eine Grundfläche geschraubt und mit Hilfe einer Gewindestange, die die Bahnen verbindet, Unterlegscheiben und Muttern senkrecht ausgerichtet.

3.2 Messung

Bei der Messung wird eine Metallkugel verwendet, die durch einen Elektromagneten am Startpunkt festgehalten wird. Der Magnet wird dabei so eingestellt, dass der Schwerpunkt der Kugel genau auf dem Startpunkt liegt. Die Kugel wird mit möglichst geringer Spannung gehalten um eine Verzögerung so gering wie möglich zu halten. Per Knopfdruck wird der Elektromagnet ausgeschaltet und gleichzeitig eine Stoppuhr gestartet. Durchläuft die Kugel eine am Zielpunkt angebrachte Schranke, wird die Stoppuhr angehalten.

I. Kreisbogen nach oben gewölbt

1.	0,8358 s
2.	0,8203 s
3.	0,8405 s
4.	0,8509 s
5.	0,8286 s
6.	0,8176 s
7.	0,8132 s
8.	0,8172 s
9.	0,8335 s
10.	0,8328 s

Der Mittelwert der 10 Messwerte beträgt etwa:

0,8290 s

II. gerade Bahn

1.	0,6564 s
2.	0,6581 s
3.	0,6414 s
4.	0,6412 s
5.	0,6442 s
6.	0,6493 s
7.	0,6330 s
8.	0,6555 s
9.	0,6604 s
10.	0,6591 s

Der Mittelwert der 10 Messwerte beträgt etwa:

0,6499 s

III. Kreisbogen nach unten gewölbt

1.	0,5458 s
2.	0,5390 s
3.	0,5476 s
4.	0,5381 s
5.	0,5480 s
6.	0,5425 s
7.	0,5454 s
8.	0,5484 s
9.	0,5433 s
10.	0,5399 s

Der Mittelwert der 10 Messwerte beträgt etwa:

0,5438 s

IV. Zykloidenbogen

1.	0,4822 s
2.	0,4942 s
3.	0,4918 s
4.	0,4910 s
5.	0,4847 s
6.	0,4939 s
7.	0,4919 s
8.	0,4778 s
9.	0,4945 s
10.	0,4906 s

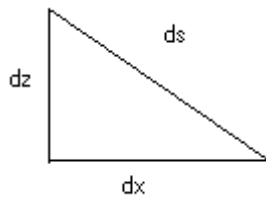
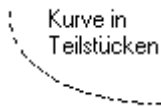
Der Mittelwert der 10 Messwerte beträgt etwa:

0,4893 s

3.3 Vergleich der Zeiten

Hier wird deutlich, dass nicht die kürzeste Verbindung, also die gerade Bahn, sondern die Zykloide die schnellste Verbindung der beiden Punkte ist. Die nach oben gewölbte Kreisbahn ist die langsamste der vier Bahnen, da die Kugel erst langsam und dann bis zum Zielpunkt immer stärker bis zur Endgeschwindigkeit beschleunigt. Durchschnittlich braucht eine homogene Kugel für das Durchrollen des Kreisbogens etwa 0,8290 Sekunden. Bei der geraden Bahn findet eine konstante Beschleunigung statt, die Kugel benötigt etwa 0,6499 Sekunden. Die nach unten gewölbte Kreisbahn ist eine schnellere Verbindung der beiden Punkte als die Gerade, allerdings noch nicht so schnell wie die Zykloide. Der Zeitbedarf liegt hier bei ungefähr 0,5438 Sekunden. Dass die Zykloide die schnellste Verbindung der beiden Punkte ist, lässt sich auch mathematisch beweisen, indem man das in 3.4 hergeleitete Integral optimiert. Das Ergebnis dieser Optimierung ist eine Zykloidengleichung. Bei der Zykloide hat die Kugel schon früh eine hohe Geschwindigkeit und wird dann immer weniger beschleunigt. Das hat zur Folge, dass, obwohl die Endgeschwindigkeiten bei allen vier Bahnen gleich sind, die Durchschnittsgeschwindigkeiten variieren und die Kugeln somit unterschiedlich viel Zeit für das Durchlaufen der Bahnen benötigen. Der Mittelwert, der bei dem Zykloidenbogen gemessenen Zeiten, liegt bei etwa 0,4893 Sekunden.

3.4 Herleitung der Gleichung



$$dt = \frac{ds}{v}$$

$$\textcircled{1} \quad ds = \sqrt{dz^2 + dx^2}$$

$$T = \sum_n dt_n = \sum_n \frac{ds}{v_n}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot z$$

$$\omega = \frac{v}{r_{\text{Roll}}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \left(\frac{v}{r_{\text{Roll}}} \right)^2 = m \cdot g \cdot z$$

$$v^2 \cdot \left(\frac{1}{2} m + \frac{1}{2} \cdot \frac{J}{r_{\text{Roll}}^2} \right) = m \cdot g \cdot z$$

$$\textcircled{2} \quad v = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot z}{\frac{1}{2} m + \frac{1}{2} \cdot \frac{J}{r_{\text{Roll}}^2}}}$$

$$\textcircled{3} \quad v = \sqrt{k \cdot z}$$

Betrachtet man eine beliebige Kurve, so

kann man diese auch in Teilstücken

darstellen. Stellt man sich nun möglichst

kleine Teilstücke vor, haben diese

Stücke die Länge ds.

Die Zeit dt, die für so ein Teilstück mit der Länge ds benötigt wird, ist gleich dem Quotienten aus Weg ds und entsprechender Geschwindigkeit v. Der Weg ergibt sich durch den Satz des Pythagoras aus dz und dx. Nimmt man an, dass es n Teilstücke sind, die die Kurve ergeben, so wäre die Summe der Zeiten, die für die Teilstücke benötigt werden, gleich der Zeit, die für die gesamte Kurve benötigt wird. Die Geschwindigkeit lässt sich mit dem Energieerhaltungssatz berechnen. Hierbei ist J das Trägheitsmoment der abrollenden Kugel.

Löst man nun den Energieerhaltungssatz

nach der Geschwindigkeit auf, so erhält

man diese Gleichung (②). Da bis auf z

alles konstant ist fasse ich es in k

zusammen (③).

$$\sum_n \frac{ds}{v_n} \xrightarrow{\lim n \rightarrow \infty} \int_{Start}^{Ziel} \frac{ds}{v}$$

Lässt man die Anzahl n der Teilstücke gegen Unendlich laufen, so erhält man als Grenzwert dieses Integral.

$$T = \int_{Start}^{Ziel} \frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{\sqrt{k \cdot z}}$$

Dann wird ds aus ① und v aus dem Energieerhaltungssatz (② und ③) eingesetzt.

$$T = \int_{Start}^{Ziel} \frac{dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\sqrt{k \cdot z}}$$

Klammert man dx aus und zieht es dann vor die Wurzel, erhält man diese Gleichung.

$$T = \int_{Start}^{Ziel} \frac{\sqrt{1 + (z')^2}}{\sqrt{k \cdot z}} \cdot dx$$

$$\frac{dz}{dx} = z'$$

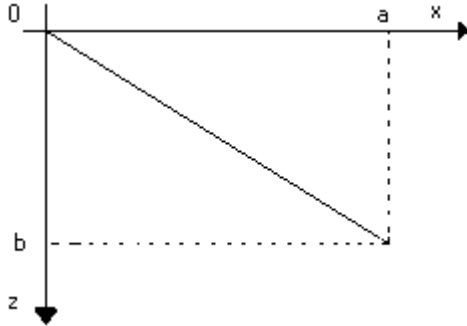
$$\textcircled{4} \quad T = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \int_{Start}^{Ziel} \frac{\sqrt{1 + (z')^2}}{\sqrt{z}} \cdot dx$$

Holt man die Konstante vor das Integral, erhält man diese allgemeine Gleichung für die Berechnung der Zeit.

3.5 Berechnung der Zeit für die gerade Bahn

$$T = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\text{Start}}^{\text{Ziel}} \frac{\sqrt{1+(z')^2}}{\sqrt{z}} \cdot dx$$

allgemeine Gleichung für die Berechnung der Zeit (④)



Skizze zur Strecke mit dem Startpunkt (0/0) und dem Zielpunkt (a/b)

$$z = mx$$

Geradengleichung mit z-Koordinatenschnittpunkt 0

$$\frac{dz}{dx} = z' = m$$

Ableitung der Geradengleichung

$$\textcircled{5} \quad m = \frac{b}{a}$$

Steigung der Geradengleichung (Steigungsdreieck)

$$T_{\text{Gerade}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{mx}} \cdot dx$$

Gleichung für die Berechnung des Zeitbedarfs auf der Geraden im Intervall von 0 bis a

$$T_{\text{Gerade}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{m + \frac{1}{m}} \cdot \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Konstante vor das Integral geschrieben

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^a x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx$$

andere Schreibweise für das Integral

Nebenrechnung:

Nebenrechnung zur Integration

$$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

$$\int_0^a x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x}$$

$$T_{\text{Gerade}} = 2 \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{m + \frac{1}{m}} \cdot [\sqrt{x}]_0^a$$

Integration (Wurzel x von 0 bis a)

$$T_{Gerade} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{m + \frac{1}{m}} \cdot \sqrt{a} - \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{m + \frac{1}{m}} \cdot \sqrt{0}$$

Gleichung nach der Integration

$$T_{Gerade} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{m + \frac{1}{m}} \cdot \sqrt{a}$$

$$T_{Gerade} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{a \cdot b}} \cdot \sqrt{a}$$

Setzt man die Steigung (⑤) in die

Gleichung ein,

kann man a kürzen.

$$T_{Gerade} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b}}$$

$$k = \frac{m \cdot g}{\frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \cdot \frac{J}{r_{Roll}^2}}$$

k ergibt sich aus Energieerhaltungssatz (② und ③)

$$J = \frac{2}{5} m r_{Kugel}^2$$

J ist das Trägheitsmoment der homogenen Kugel

$$T_{Gerade} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m \cdot g}{\frac{1}{2}m + \frac{1}{5}m \frac{r_{Kugel}^2}{r_{Roll}^2}}}} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b}}$$

Setzt man J und k in die Gleichung ein,

lässt sich die Masse komplett aus der

Gleichung kürzen, das bedeutet, die

Zeit, die eine Kugel für das

Durchlaufen der Geradenbahn benötigt,

ist unabhängig von der Masse.

$$T_{Gerade} = \frac{2}{\sqrt{\frac{g}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{r_{Kugel}^2}{r_{Roll}^2}}}} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b}}$$

$$T_{Gerade} = \sqrt{\frac{2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{r_{Kugel}^2}{r_{Roll}^2}}{g}} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b}}$$

Ist die Gleichung soweit wie möglich

vereinfacht, werden die

entsprechenden Werte eingesetzt und

das Ergebnis ausgerechnet.

$$r_{Kugel} = 0,008m$$

$$r_{Roll} = 0,007m$$

$$g = 9,81ms^{-2}$$

$$a = 0,600m$$

$$b = 0,382m$$

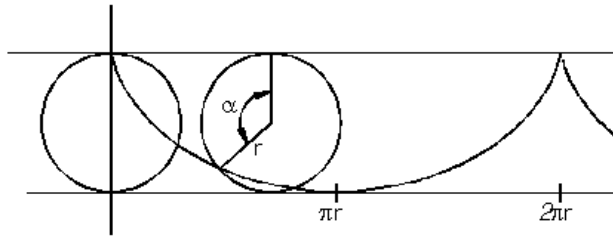
$$T_{Gerade} = \sqrt{\frac{2 + \frac{4 \cdot 0,008^2}{5 \cdot 0,007^2}}{9,81}} \cdot \sqrt{\frac{0,382^2 + 0,600^2}{0,382}} \approx 0,6412$$

Die homogene Kugel braucht ohne Reibung für die gerade Bahn etwa 0,6412 s.

3.6 Integration der Zykloide

$$T = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\text{Start}}^{\text{Ziel}} \frac{\sqrt{1+(z')^2}}{\sqrt{z}} \cdot dx$$

allgemeines Integral (④)



Skizze zur Zykloidenbahn
(ein Kreispunkt, dessen
Kreis an einer Geraden
abrollt)

$$r = r_{\text{Zyk.}}$$

$$\textcircled{6} \quad z = r_{\text{Zyk.}} \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

z und x Wert der Zykloide

$$\textcircled{7} \quad x = r_{\text{Zyk.}} \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$$

in Abhängigkeit von α

$$z(x) = ?$$

z in Abhängigkeit von x
wird gesucht

$$\textcircled{8} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx}$$

Differentialquotienten-
gleichung

$$\frac{dx}{d\alpha} = r_{\text{Zyk.}} - r_{\text{Zyk.}} \cdot \cos(\alpha) = r_{\text{Zyk.}} \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

Implizites Differenzieren
von

⑦

und

⑥ um dz nach dx

bestimmen zu können

$$\frac{dz}{d\alpha} = r_{\text{Zyk.}} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{r_{\text{Zyk.}} \cdot \sin(\alpha)}{r_{\text{Zyk.}} - r_{\text{Zyk.}} \cdot \cos(\alpha)}$$

Die Differentiale in Formel
(⑧) eingesetzt

$$\textcircled{9} \quad dx = (r_{\text{Zyk.}} - r_{\text{Zyk.}} \cdot \cos(\alpha)) \cdot d\alpha$$

dx ausgerechnet

$$T_{\text{Zyk.}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha=\alpha_{\text{Start}}}^{\alpha=\alpha_{\text{Ziel}}} \frac{\sqrt{1 + \frac{r_{\text{Zyk.}}^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{(r_{\text{Zyk.}} - r_{\text{Zyk.}} \cdot \cos(\alpha))^2}}}{\sqrt{r_{\text{Zyk.}} \cdot (1 - \cos(\alpha))}} \cdot dx$$

Gleichung für die
Berechnung des Zeitbedarfs
einer Kugel auf dem
Zykloidenbogen im
Intervall α_{start} bis α_{Ziel}

$$T_{Zyk.} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha_S}^{\alpha_Z} \sqrt{\frac{(r_{Zyk.} - r_{Zyk.} \cos(\alpha))^2 + r_{Zyk.}^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{(r_{Zyk.} - r_{Zyk.} \cos(\alpha))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{Zyk.} (1 - \cos(\alpha))}} \cdot dx$$

Zähler der Gleichung auf einen Nenner gebracht

$$T_{Zyk.} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha_S}^{\alpha_Z} \sqrt{\frac{r_{Zyk.}^2 - 2r_{Zyk.}^2 \cos(\alpha) + r_{Zyk.}^2}{(r_{Zyk.} - r_{Zyk.} \cos(\alpha))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{Zyk.} (1 - \cos(\alpha))}} \cdot dx$$

Zähler ausmultipliziert und Trigonometriesätze ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$) angewandt

$$T_{Zyk.} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha_S}^{\alpha_Z} \sqrt{\frac{2r_{Zyk.}^2 (1 - \cos(\alpha))}{r_{Zyk.}^2 - 2r_{Zyk.}^2 \cos(\alpha) + r_{Zyk.}^2 \cos^2(\alpha)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{Zyk.} (1 - \cos(\alpha))}} \cdot dx$$

Zähler im Zähler ausgeklammert und Nenner des Zählers ausmultipliziert

$$T_{Zyk.} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha_S}^{\alpha_Z} \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\alpha))}{1 - 2 \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{Zyk.} (1 - \cos(\alpha))}} \cdot dx$$

$r_{Zyk.}^2$ gekürzt

$$T_{Zyk.} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha_S}^{\alpha_Z} \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\alpha))}{(1 - 2 \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)) \cdot (r_{Zyk.} (1 - \cos(\alpha)))}} \cdot dx$$

das Integral unter eine Wurzel geschrieben und auf einen Bruchstrich gebracht

$$T_{Zyk.} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha_S}^{\alpha_Z} \sqrt{\frac{2}{r_{Zyk.} (1 - 2 \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha))}} \cdot dx$$

$(1 - \cos(\alpha))$ gekürzt

$$T_{Zyk.} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha_S}^{\alpha_Z} \sqrt{\frac{2}{r_{Zyk.} (1 - \cos(\alpha))^2}} \cdot (r_{Zyk.} - r_{Zyk.} \cos(\alpha)) \cdot d\alpha$$

dx eingesetzt (⊙)

und

$$T_{Zyk.} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha_S}^{\alpha_Z} \sqrt{\frac{2r_{Zyk.}^2 (1 - \cos(\alpha))^2}{r_{Zyk.} (1 - \cos(\alpha))^2}} \cdot d\alpha$$

unter die Wurzel geholt

$$T_{Zyk.} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\alpha_S}^{\alpha_Z} \sqrt{2 \cdot r_{Zyk.}} \cdot d\alpha$$

$(1 - \cos(\alpha))^2$ gekürzt

$$T_{Zyk.} = \sqrt{\frac{2r_{Zyk.}}{k}} \cdot (\alpha_Z - \alpha_S)$$

Konstante nach vorn geholt
und Integral aufgelöst

$$T_{Zyk.} = \sqrt{\frac{2r_{Zyk.}}{mg} \cdot \left(\alpha_Z - \alpha_S \right)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}m + \frac{1}{5}m \frac{r_{Kugel}^2}{r_{Roll}^2}}$$

k (② und ③) eingesetzt

$$T_{Zyk.} = \sqrt{\frac{2r_{Zyk.}}{g} \cdot \left(\alpha_Z - \alpha_S \right)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \frac{r_{Kugel}^2}{r_{Roll}^2}}$$

Masse wieder gekürzt
(siehe 3.5)

$$T_{Zyk.} = \sqrt{\frac{2r_{Zyk.}}{g}} \cdot \pi - \sqrt{\frac{2r_{Zyk.}}{g}} \cdot 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \frac{r_{Kugel}^2}{r_{Roll}^2}} \quad \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \frac{r_{Kugel}^2}{r_{Roll}^2}}$$

Integration

$$T_{Zyk.} = \sqrt{\frac{2r_{Zyk.}}{g}} \cdot \pi$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \frac{r_{Kugel}^2}{r_{Roll}^2}}$$

Soweit wie möglich

vereinfacht, Werte

$$r_{Zyk.} = 0,191m$$

$$g = 9,81ms^{-2}$$

$$r_{Kugel} = 0,008m$$

$$r_{Roll} = 0,007m$$

eingesetzt und

ausgerechnet.

$$T_{Zyk.} = \sqrt{\frac{0,382}{9,81}} \cdot \pi \approx 0,5409$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{0,008^2}{0,007^2}}$$

Die homogene Kugel
benötigt ohne Reibung etwa
0,5409 s, um die
Zykloidenbahn zu
durchrollen.

3.7 Vergleich von Theorie und Experiment

1. Gerade:

Der Mittelwert der gemessenen Werte der experimentellen Ermittlung der Zeit liegt bei

0,6499 sec.

Die rechnerische Lösung ergibt einen Wert von etwa

0,6412 sec.

Der Unterschied dieser beiden Werte lässt sich durch die Reibung erklären, die bei der Rechnung vernachlässigt wurde.

Kritik an der:

- experimentellen Lösung: der Rollradius r_{Roll} variiert, da die Schienen nicht ganz exakt parallel sind.
- rechnerischen Lösung: der Rollradius r_{Roll} konnte nicht genau ermittelt werden

2. Zykloide:

Bei der Zykloidenbahn liegt der Mittelwert der gemessenen Zeiten bei

0,4893 sec.

Nach der Rechnung sollte ein Wert von

0,5409 sec.

benötigt werden.

Diese Differenz, bei der die tatsächlich benötigte Zeit geringer ist als die, die durch Rechnung ermittelt wurde, ist wohl darauf zurückzuführen, dass die Kugel am Anfang, wo die Kurve nahezu senkrecht verläuft, gleitet.

3. Kreisbahnen:

Die Gleichung für die Kreisbahnen lässt sich nicht elementar integrieren, daher ist hier für mich kein Vergleich von Theorie und Experiment möglich.

3.8 Interessantes

I. Zur Zyклоide:

Zykloiden treten auch im Alltag auf. So beschreibt zum Beispiel ein Reifenventil eines fahrenden Fahrrads oder Autos eine Zyклоide. Nach der Definition einer Zyклоide rollt ein Kreis an einer Geraden ab. Beim Beispiel des Reifenventils liegt der Punkt (also das Ventil) allerdings nicht auf dem Umfang des Kreises (Reifen), sondern etwas näher am Mittelpunkt. Dieser Punkt beschreibt zwar auch eine Zyклоide, aber eine verkürzte. Ebenso gibt es natürlich auch verlängerte Zykloniden, bei denen der Punkt außerhalb des abrollenden Kreises liegt.

Eine weitere Eigenschaft der Zyклоide ist, dass die Kugel, egal an welchem Punkt der Zyклоide sie losgelassen wird, bis zum Zielpunkt immer die gleiche Zeit benötigt. Diese Eigenschaft nennt man auch Tautochronie. ‚Die Tautochronie der Zyклоide und die weitere Eigenschaft, dass die Evolute der Zyклоide wieder eine Zyклоide ist, nutzte Huygens, um eine bei allen Auslenkungen genau gehende Uhr zu konstruieren. Dies war für die Schifffahrt eine wichtige Erfindung, da das mathematische Pendel ja nur für kleine Auslenkungen gilt‘ [Lang02] und [Vog97].

Bemerkenswert ist auch die Tatsache, dass die Brachistochrone auch tiefer als der

Zielpunkt verlaufen kann, wenn $\frac{x_{Start} - x_{Ziel}}{z_{Start} - z_{Ziel}} > \frac{\pi}{2}$, also der Quotient der

Differenzen der beiden Punkte größer ist als pi-halbe.

II. Das Brachistochroneproblem im Alltag:

Das Brachistochroneproblem findet man ebenfalls im Alltag wieder. ‚So wählen Fahrer bei Radrennen auf ovaler am Rand stark überhöhter Bahn nicht den kürzesten Weg unten, sondern eine Bahnkurve, die abwechselnd hoch und tief liegt.

Sie fahren fast bis zum oberen Rand der Bahn und lassen sich dann wieder nach unten stürzen. [Stor86]

Die durchschnittliche Zeit für eine Radrunde wird dadurch bis zu 15% kürzer.

Bei der Untergrundbahn in Glasgow liegen die Bahnstationen über der Erde. Die Bahn taucht während der Fahrt in den Untergrund ab und kommt bei der nächsten Station wieder nach oben. Das spart Baukosten und Energie, da beim Erreichen der Stationen nicht so stark gebremst werden muss.‘ [s-line]

4.1 Literaturhinweise:

- [Lang02] Langenfeld, Ulrich; „Das Brachistochronenproblem“
- [Wag00] Wagner, Alfred: „Die Variationsrechnung und ihre Basler Ursprünge“
- [Vog97] Vogel, H. ; „Gehrtsen, Physik“
- [Stor86] Stork, David G. & Yang, Ju-xing & Stover, Chris : “The unrestrained brachistochrone”
- [s-line] <http://www.s-line.de/homepages/kepler/brachy.htm>

4.2 Literaturverzeichnis:

- Brockhaus: „Der Brockhaus in einem Band“
FAB, Leipzig, Mannheim (1994)
- Grehn, Joachim: „Metzler Physik, Oberstufe“ ; Kap. 1.4, S. 66 – 72
Schroedel Schulbuchverlag 1998
- Griesel, Hein „Unterrichtshefte zur Mathematik von heute“ Heft 0.5
„Analysis II “ Schroedel / Schöningh (1970)
- Langenfeld, Ulrich: „Das Brachistochronenproblem“; Deutsches
Museum Bonn (Mathematik zum Anfassen) 2002
- Mach, Ernst: „Die Mechanik“ ; Wissenschaftliche
Buchgesellschaft Darmstadt 1976
- Pólya, Georg: „Mathematik und plausibles Schließen“; Band 1: „In-
duktion und Analogie in der Mathematik“; S.216-233
- Schlichting, H. Joachim: „Der kürzeste Weg ist nicht immer der schnellste“
Physik und Didaktik 18/3, 231 (1990)
- Simmons, George F. : “Differential Equations”; Cap. 9: “The Calculus of
Variations”; Mc Graw Hill New York 1972
- Spiegel, Murray R.: „Höhere Mathematik für Ingenieure und
Naturwissenschaftler“ ; Mc Graw-Hill London
- Stork, David. G.
& Yang, Ju-xing
& Stover, Chris: “The unrestrained brachistochrone”
American Journal of Physics 54, (1986)

- Vogel, Helmut : „Gerthsen Physik“
Springer, 19. Auflage 1997
- Wagner, Alfred: „Die Variationsrechnung und ihre Basler Ursprünge“;
Uni nova, Juni 2000; S. 36 – 40

- <http://www.physik.uni-ulm.de/math/gbaumann/Mechanik/Kapitel8.html>
(12.01.2002)

- http://www.math.bcit.ca/entrtain/coaster/t_brach.htm
(12.01.2002)

- <http://www.s-line.de/homepages/keppler/brachy.htm>
(12.01.2002)

- <http://www.bionik.tu-berlin.de/user/giani/diplom/evo.html>
(20.01.2002)

- <http://kugelbahn.bei.t-online.de/index.html>
(10.02.2002)

- <http://www.math.de/>
(10.02.2002)

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

.....
(Ort) (Datum) (Unterschrift)